SESSION DE 1961

MATHÉMATIQUES

Options T et TA

Épreuve n° 2 (problème)

DURÉE : 3 heures

Les parties I, II *et* III *sont indépendantes.*

La résolution de II 3° *n'est pas nécessaire à la suite du* II.

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé direct. Tout point M pourra être repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y); tout point M différent de O pourra être repéré par un système de coordonnées polaires (ρ, θ) par rapport à l'axe polaire $(O, \vec{i})$.

I. 1° Soit C le cercle de centre O et rayon 1, orienté dans le sens positif, Ω le point $(x = 1, y = 0)$, origine de l'abscisse curviligne sur C et M le point de C d'abscisse curviligne α, $\alpha \in [0, 2\pi[$.

Déterminer le centre de gravité G de l'arc ΩM considéré comme fil homogène.

I. 2° Construire l'ensemble Γ_0 des points G lorsque α décrit $[0, 2\pi[$.

Donner une équation polaire de Γ_0.

II. 1° Soit Γ la courbe d'équation polaire $\rho = \dfrac{\sin\theta}{\theta}$ si $\theta \neq 0$, $\rho = 1$ si $\theta = 0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Étudier le signe de ρ et indiquer la forme générale de cette courbe (le tracé précis utilise les résultats de 2°, 3° et 4°).

Tournez la page S. V. P.

II. 2° On recherche les points P de Γ où la tangente est perpendiculaire à OP.

Montrer que l'angle polaire θ d'un tel point est solution d'une équation du type $\theta = f(\theta)$. Montrer que ces points sont situés sur un cercle qu'on précisera.

II. 3° *a*. Montrer que l'équation $\theta = \operatorname{tg}\theta$ a une infinité dénombrable de racines > 0.

Soit θ_n la $n^{\text{ième}}$ racine > 0. Montrer que $n\pi < \theta_n < n\pi + \dfrac{\pi}{2}$.

II. 3° *b*. Calculer θ_1 à 10^{-3} près en indiquant soigneusement la méthode utilisée.

II. 3° *c*. Calculer $\theta_n - n\pi - \dfrac{\pi}{2}$ en fonction de $\operatorname{Arctg}\dfrac{1}{\theta_n}$.

En déduire qu'on peut écrire $\theta_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\lambda}{n} + \dfrac{\varepsilon_1(n)}{n}$,

avec $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_1(n) = 0$. Calculer λ.

II. 3° *d*. En utilisant *c*, montrer qu'on peut poursuivre le développement en :

$$\theta_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\lambda}{n} + \frac{\mu}{n^2} + \frac{\varepsilon_2(n)}{n^2} \qquad \text{avec } \lim_{n\to\infty} \varepsilon_2(n) = 0$$

calculer μ.

II. 4° Montrer que les points de Γ où la tangente est parallèle à l'axe polaire sont situés sur un cercle.

II. 5° Déterminer, pour chaque arc de Γ passant par O le rayon de courbure en O.

III. 1° *a*. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\theta}{\theta}\, d\theta$ est convergente.

On admettra pour la suite que $I = \dfrac{\pi}{2}$.

ENSAM 81

III. 1° *b*. Étudier la convergence de $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos\theta}{\theta}\, d\theta$.

III. 1° *c*. Soit u un paramètre réel. Calculer en fonction de u :

$$J(u) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(u\theta)}{\theta}\, d\theta$$

Construire le graphe de J.

III. 2° Soit k un paramètre réel positif. En utilisant les résultats du 1° étudier la convergence et calculer en fonction de k, lorsqu'elles existent, les intégrales :

$$S(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\theta}{\theta} \sin k\theta\, d\theta \qquad \text{et} \qquad C(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\theta}{\theta} \cos k\theta\, d\theta$$

Pour C (k) on pourra distinguer les cas $0 \leqslant k < 1$, $k = 1$, $k > 1$.
Tracer le graphe de C.

Soit E_n l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions réelles de variable réelle de la forme :

$$t \longmapsto a_0 + \sum_{p=1}^{p=n} a_p \cos pt + b_p \sin pt$$

Soit $\omega \in \mathbb{R}$, $0 < \omega < n$, et ω *non entier*.

A $g \in E_n$ on fait correspondre G définie par :

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\omega(t-u)}{\pi(t-u)}\, g(u)\, du$$

III. 3° Démontrer que $H(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\omega v}{\pi v}\, g(t-v)\, dv$ est convergente pour tout t réel et pour toute fonction g de E_n.

En déduire la convergence de l'intégrale utilisée pour définir G (t) et l'égalité H (t) = G (t).

III. 4° Montrer que G $\in E_n$, que l'application de E_n dans E_n qui à g fait correspondre G est linéaire et donner sa matrice dans la base

B : $B = \{t \longmapsto 1, t \longmapsto \sin t, t \longmapsto \cos t, \ldots, t \longmapsto \sin mt, t \longmapsto \cos mt, \ldots, t \longmapsto \sin nt, t \longmapsto \cos nt\}$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail